A N A L I Z A   F U N K C J O N A L N A

PPI 2r., sem. letni
LISTA 3

Wrocław, 8 marca 2006

ZADANIE 1. Wykaż, że jeśli ciąg podstawowy (x_n) ma podciąg (x_{n_k}) zbieżny do x, to cały ciąg (x_n) też jest zbieżny do x.

ZADANIE 2. Wykaż, że całkowita ograniczoność implikuje zwykłą ograniczoność.

ZADANIE 3. Wykaż, że w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (z metryką na przykład Euklidesową) pojęcia ograniczoności i całkowitej ograniczoności podzbioru są tożsame.

ZADANIE 4. Wykaż, że ciągły obraz zbioru zwartego jest zwarty (czyli, że jeśli $f : X \to Y$ jest funkcją ciągłą i X jest zbiorem zwartym, to $f(X)$ też jest zbiorem zwartym).

ZADANIE 5. Uzasadnij jednym zdaniem, że podzbiór zwarty przestrzeni X jest jej podbiorem domkniętym.

ZADANIE 6. Wykaż, że podzbiór domknięty przestrzeni zwartej jest zwarty.

ZADANIE 7. Wykaż, że każda funkcja ciągła określona na zwartej dziedzinie jest jednostajnie ciągła.

ZADANIE 8.
W zbiorze $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ wszystkich ciągów zero-jedynkowych postaci

$$x = x_1, x_2, x_3, \cdots : \quad \forall_{n\geq 1} \quad x_n = 0 \text{ lub } 1$$

wprowadzamy metrykę wzorem:

$$d(x,y) = \frac{1}{\min\{n : \ x_n \neq y_n\}}.$$

(a) sprawdź, że to jest metryka w tym zbiorze
(b) powiedz słowami, kiedy dwa ciągi zero-jedynkowe są bliskie sobie
(c) czy z tą metryką zbiór $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ jest zwarty?

Tomasz Downarowicz